خلاصه جلسه قبل

تابع تبدیل: $\frac{y}{U} = C(SI-A)^{-1}B+D$

معادله مشخصه: $Det(SI-A)=0$

نوشتن معادلات حالت فضایی از روی تابع تبدیل.

$$\frac{y}{U}=\frac{K}{as^2+bs+C}$$

☆ (درجه معادله مشخصه، درجه تابع تبدیل را تعیین می‌کند)

اگر درجه مخرج از صورت بیشتر شد ترم D صفر شود

$$as^2y+bsy+cy=ku \qquad a\ddot{y}+b\dot{y}+cy=ku$$

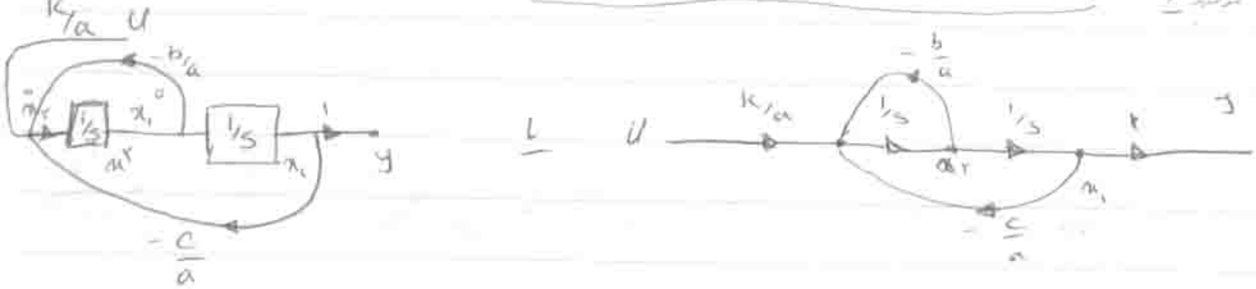
اگر $cs^2y+dsy+fy=asu+bu \Rightarrow c\ddot{y}+d\dot{y}+f\dot{y}\ \cancel{y}=a\dot{u}+bu$

$y=x_1$ فرض، $\dot{y}=\dot{x}_1=x_2$ و $\ddot{y}=\dot{x}_2$

$y=x_1 \Rightarrow \boxed{y=1x_1+0x_2+0u}$ معادله خروجی

$\boxed{\dot{x}_1=0x_1+1x_2+0u}$ معادله حالت متغیر ۱

$a\dot{x}_2+bx_2+Cx_1=Ku \Rightarrow \boxed{\dot{x}_2=-\frac{c}{a}x_1-\frac{b}{a}x_2+\frac{k}{a}u}$ معادله حالت متغیر ۲



$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a}\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}0\\ \frac{k}{a}\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} \qquad D=0$$

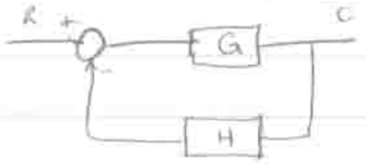
اگر از صفرها و قطبها برای بدست آوردن تابع تبدیل استفاده شود [illegible] باید = تابع تبدیل ابتدایی بر [illegible]

Subject: کنترل خطی

Year. ۸۷ Month. ۱۲ Date. ۲۳/۲

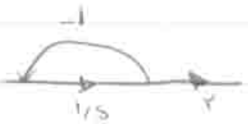
اگر بتوان مخرج تبدیل را تجزیه کرد و به چند کسر تبدیل کرد می‌توان هر کدام را به صورت یک مسیر موازی جدا تبدیل کرده و در انتها آنها را با هم جمع کرد.

$$\frac{y}{u} = \frac{3s+5}{s^2+3s+2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} \qquad A = 2 \;, B = 1$$

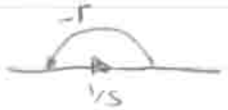


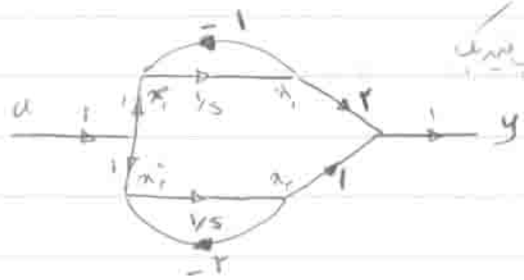
$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1+GH}$$

$$\frac{2}{s+1} = \frac{2 \times \frac{1}{s}}{1+\frac{1}{s}}$$



$$\frac{1}{s+(2)} = \frac{1/s}{1+\frac{2}{s}}$$





$$y = 2x_1 + x_2 + 0u$$
$$\dot{x}_1 = -x_1 + 0x_2 + 1u$$
$$\dot{x}_2 = 0x_1 - 2x_2 + 1u$$

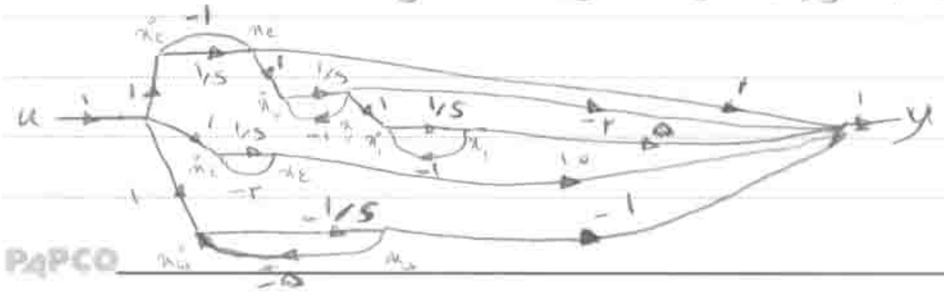
اگر معادله مشخصه ریشه تکراری داشته باشد:

$$\frac{y}{u} = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{5}{(s+1)^3} + \frac{10}{s+2} - \frac{1}{s+5}$$

مرتبه ۵ خواهد شد و ۵ متغیر حالت باید در نظر گرفت

ریشه‌های مضاعف را می‌توان به صورت دوره‌های متوالی در نظر گرفت که بهره‌های آن در هم ضرب می‌شود

$$\frac{y}{u} = 1 \times \frac{1/s}{1+1/s} + 2 \times \frac{1/s}{1+1/s} \times \frac{1/s}{1+1/s} + 5\,\frac{1/s}{1+1/s} \times \frac{1/s}{1+1/s} \times \frac{1/s}{1+1/s} + 10\,\frac{1/s}{1+2/s} - 1 \times \frac{1/s}{1+5/s}$$



$y = 4x_3 - 2\dot{x}_2 + 5x_1 + 6x_4 - x_5 + 0u \qquad C = [5 \ -2 \ 1 \ 10 \ -1]$

$D = 0$

$\dot{x}_1 = 0x_3 + x_2 - x_1 + 0x_4 + 0x_5 + 0u$

$\dot{x}_2 = x_3 - x_2 + 0x_1 + 0x_4 + 0x_5 + 0u$

$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ به این روش تحقق سطری می‌گویند.

$\dot{x}_3 = -x_3 + 0x_2 + 0x_1 + 0x_4 + 0x_5 + u$

$\dot{x}_4 = 0x_3 + 0x_2 + 0x_1 - 2x_4 - 0x_5 + u$

$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

$\dot{x}_5 = 0x_3 + 0x_2 + 0x_1 + 0x_4 - 5x_5 + u$

تحقق مستقیم یا بدست آوردن ماتریس‌های A و B و C و D بطور مستقیم از روی ضرایب صورت و مخرج

تابع تبدیل
درجه صورت از مخرج کمتر

$$\frac{y}{U} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

ماتریس A را از روی ضرایب معادله مشخصه می‌نویسیم

ضرایب معادله مشخصه

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & \text{صفر} & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & & a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\frac{y}{u} = \frac{0.5s^2 + 0.3s + 0.7}{s^3 + 0.3s + 0.7} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.7 & 0 & -0.3 \end{bmatrix}$$

تعداد سطرهای ماتریس B به تعداد متغیرهای حالت است

$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$C = [b_0 \ b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_{n-1}]$

$D = k$ اگر درجه صورت از مخرج کمتر باشد $D = 0$ و اگر برابر باشد $D = K$ است

[illegible]

Subject: کنترل خطی
Year: ۸۷ Month: ۱۲ Date: ۲۳ (۴)

$$\frac{y}{u}=\frac{7s^2+4s+5}{s^2+3s+10}=\frac{-15s-65}{s^2+3s+10}+7 \qquad C=\begin{bmatrix}-65 & -15\end{bmatrix} \quad D=7$$

$$B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -10 & -3\end{bmatrix}$$

روش راث و هرویتس

تعیین پایداری یک سیستم کنترل مرتبه n بدون حل معادله مشخصه

تعیین ریشه‌های ناپایدار معادله مشخصه

معادله مشخصه $\Delta(s)=a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$

تمامی ضرایب را یک درمیان در دو سطر اول جدول جای می‌دهند (زوج و فرد از نظر توان)

a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	s^n
a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	s^{n-1}
l_1	l_2	l_3	l_4	s^{n-2}
h_1	h_2	h_3	h_4	s^{n-3}
$\vdots$				$\vdots$
				s^1
a_0				s^0

$$\begin{vmatrix}a_n & a_{n-2}\\ a_{n-1} & a_{n-3}\end{vmatrix} \qquad l_1=\frac{a_{n-1}a_{n-2}-a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$l_2=\frac{a_{n-1}a_{n-4}-a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$l_3=\frac{a_{n-1}a_{n-6}-a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

Subject: کنترل خطی

Year ۸۷ Month ۱۲ Date ۲۳۵

$$b_1 = \frac{c_1 a_{n-3} - a_{n-1} c_2}{c_1} \qquad b_2 = \frac{c_1 a_{n-5} - a_{n-1} c_3}{c_1}$$

تعداد تغییر علامت ستون حد اول جدول مساوی با تعداد ریشه های ناپایدار

مثال

$(s-1)(s-2)=0$

$s^2-3s+2=0$

s^2	۱	۲
s^1	-3	۰
s^0	۲	

مشاهده می شود که در ستون اول جدول ۲ بار تغییر علامت بوجود آمده و دو ریشه ناپایدار وجود دارد.

$s^4+6s^3+11s^2+6s+15=0$

s^4	۱	۱۱	۱۵
s^3	۶	۶	۰
s^2	۱۰	۱۵	۰
s^1	-3	۰	
s^0	۱۵		

از اینجا می فهمیم که دو ریشه ناپایدار دارد.

در معادلات مشخصه زیر با استفاده از جدول راث هرویتس تعداد ریشه های ناپایدار را حساب کنید.

$s^5+2s^4+2s^3+4s^2+11s+10=0$

$s^4+s^3+11s^2+9s+18=0$

در این معادلات بعضی از درایه ها صفر می شود که حالتهای خاص بوجود می آید در رفع ابهام نیاز دارد.

Subject: کنترل خطی
Year. ۸۷ Month. ۱۲ Date. ۲۳ ۶

L_1 L_1

S^5	۱	۲	۱۱
S^4	۲	٤	۱۰
S^3	$\overset{+}{0}$ ε	۶	۰
S^2	$-\frac{۴ε-۱۲}{ε}$	۱۰	۰
S^1	+		
S^0	۱۰		

حالت خاص
ناصفر صفر

۱- معادله کمکی تشکیل دهیم که ریشه هایش عکس این باشد
۲- به جای ۰ عدد کوچک ε بگذاریم

S^4	۱	۱۱	۱۸
S^3	۱	۹	۰
S^2	۲	۱۸	۰
S^1	۰	۰	۰
S^0			

حالت خاص
یک سطر صفر است

$$a = \frac{۶ \times \frac{۴ε-۱۲}{ε} - ۱۰ε}{\frac{۴ε-۱۲}{ε}}$$

حد این جمله را حساب کنیم وقتی ε به سمت صفر میل کند

روش دیگر: معکوس معادله بالا

$$1+2S+2S^2+4S^3+11S^4+10S^5=0$$

S^5	۱۰	٤	۲
S^4	۱۱	۲	۱
S^3	$\frac{۲٤}{۱۱}$	$\frac{۱۲}{۱۱}$	۰
S^2		۱	
S^1			
S^0	۱		

Subject: کنترل خطی
Year: ۸۷ Month: ۱۲ Date: ۲۳ (۷)

s^4	۱	۱۱	۱۸
s^3	۱	۹	۰
s^2	۲	۱۸	۰
s^1	$\cancel{۰}$ ۴	۰	۰
s^0	۱۸		

معادله کمکی مطرحش ۲s^2+۱۸=۰

s^2+۹=۰ ds ،d و $\boxed{۴s+۰=۰}$