Subject: کنترل خطی

Year ۸۷ Month ۱۲ Date ۱۶(۱)

متغیر معادله حالت   مشتق

$\dot{x} = Ax + Bu$ ورودی

$y = Cx + Du$

خروجی

کاربرد معادلات حالت و خروجی در کنترل خطی

معادلات مرتبهٔ بالا که معادله دیفرانسیل مرتبهٔ بالا دارند، معادله دیفرانسیل را به معادله دیفرانسیل مرتبهٔ اول تبدیل می‌کنیم که به آن معادلات، معادلات حالت گفته می‌شود.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}$$

A, B, C, D: ضرایب ثابت (اسکالر یا ثابت)

متغیرهای حالت پارامترهایی هستند که خروجی به آن‌ها وابستگی خواهد داشت

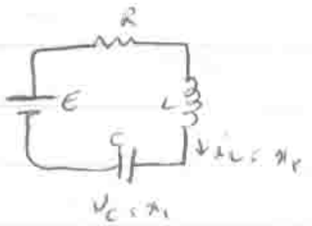
یک معادله دیفرانسیل مرتبهٔ n ام به چند n معادله دیفرانسیل مرتبهٔ اول تبدیل می‌شود.

معادلات زیر یکی از دو مدار دیگر تبدیل کنیم: معادلات جریان در مدار   ~~$s^2+\frac{R}{L}s$~~

$s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}=0$ ① $s^2+\frac{1}{RC}s+\frac{1}{LC}=0$ ② مدار RLC

مدار RLC

استفاده از معادلات حالت و خروجی در مدار الکتریکی



$$x = \begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{V}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$$

تبدیل یک معادله دیفرانسیل مرتبهٔ اول را این مدار می‌نویسیم.

KVL: V_C متغیر حالت

$E = Ri_L + L\dot{i}_L + \frac{1}{C}\int i_L\,dt$

$E = V_C + L\dot{i}_L + Ri_L$

$\dot{i}_L = -\frac{1}{L}V_C - \frac{Ri_L}{L} + \frac{E}{L}$ ①

$\dot{x} = Ax + Bu$

KCL:

$i_L = i_C = C\dot{V}_C$

$C\dot{V}_C = i_L \Rightarrow \dot{V}_C = \frac{1}{C}i_L$

$\dot{V}_C = 0V_C + \frac{1}{C}i_L + 0E$

$$\begin{cases} \dot{V}_C = 0V_C + \frac{1}{C}i_L + 0E \\ \dot{i}_L = -\frac{1}{L}V_C - \frac{R}{L}i_L + \frac{E}{L} \end{cases}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{V}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}}_{B}$$

Subject: کنترل خطی

Year. ۸۷ Month. ۱۲ Date. ۱۶ (۲)

$$\overset{V_R}{\widetilde{V_o}} = y = Ri_L = 0V_c + Ri_L + 0E \Rightarrow y = V_o = \underbrace{[0 \quad R]}_{C}\begin{bmatrix} V_c \\ i_L \end{bmatrix} + \underbrace{0}_{D}E$$

تعیین تابع تبدیل، معادله مشخصه با استفاده از معادله حالت و خروجی

$$\left.\begin{aligned} x^\circ &= Ax + Bu \\ (۲)\quad y &= Cx + Du \end{aligned}\right\} \text{حوزه زمان} \qquad x^\circ = \frac{dx}{dt}$$

[illegible] به حوزه s ببریم

$$SX = AX + BU$$

$$Y = CX + DU$$

بدست آوردن تابع تبدیل ارتباط بین Y و U

ماتریس واحد یا همانی

$$(۱)\quad SX - AX = BU \Rightarrow X(SI - A) = BU \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(۳)\quad X = (SI - A)^{-1}BU$$

این معادله را در معادله ۲ قرار می‌دهیم

$$۲,۳ \Rightarrow Y = C(SI - A)^{-1}BU + DU \Rightarrow Y = \underbrace{[C(SI - A)^{-1}B + D]}_{\text{TF تابع تبدیل}}U$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Leftarrow \text{اگر}$$

$$A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}{ad - bc}$$

$$\Rightarrow Det(SI - A) = 0 \qquad \text{معادله مشخصه}$$

$$SI - A = \begin{bmatrix} s & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & s + \frac{R}{L} \end{bmatrix} \qquad det(SI - A) = 0 \Rightarrow s\left(s + \frac{R}{L}\right) + \frac{1}{LC} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0}$$

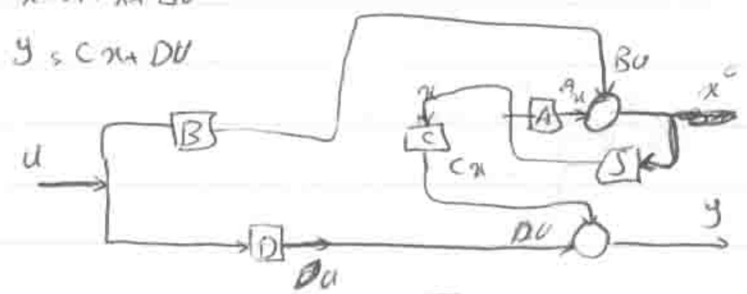
معادله مشخصه RLC سری

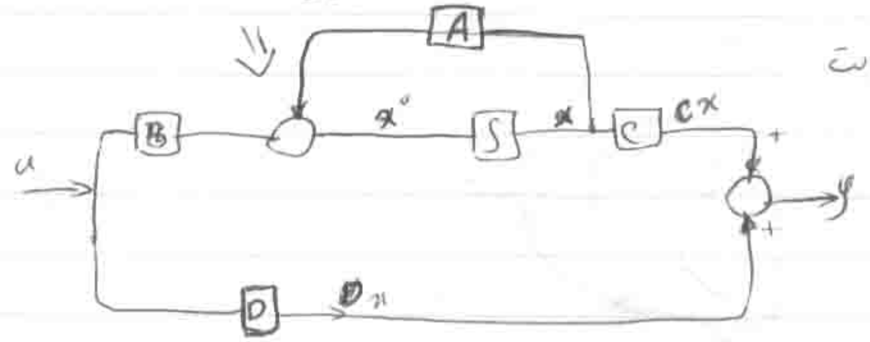
تمرین: تعیین معادله مشخصه مدار RLC سری با استفاده از معادلات حالت و خروجی

معادلات حالت و خروجی در کنترل:

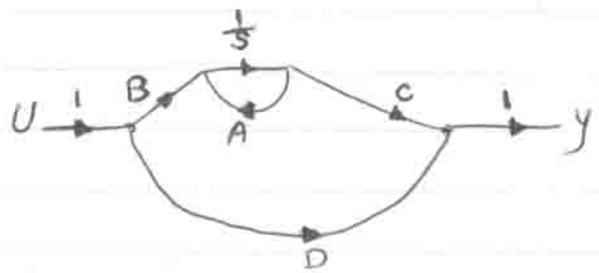
$\dot{x} = Ax + Bu$

$y = Cx + Du$





بلوک دیاگرام معادلات حالت و خروجی در کنترل

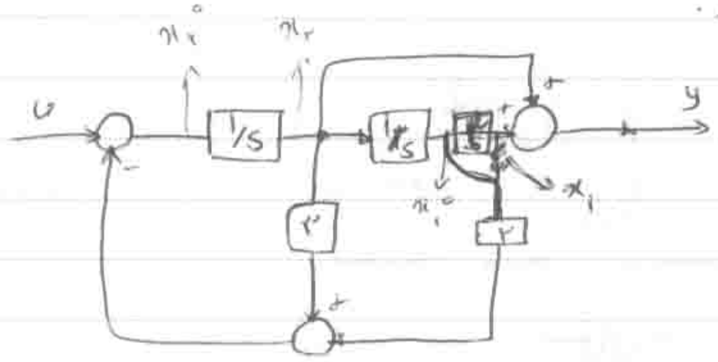


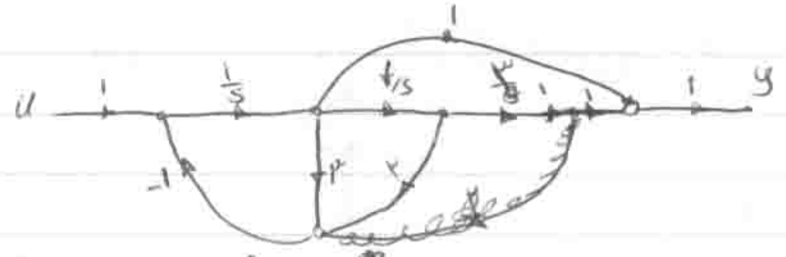
Subject: کنترل خطی
Year ۸۷ Month ۱۲ Date ۱۷

در شکل زیر

۱- فلوگراف سیستم را رسم کنید

۲- به دو روش معادلات حالت فوری و دیدن توابع تبدیل $\frac{y}{u}$ را محاسبه کنید و نتایج را با هم مقایسه کنید.





$x_1^\circ = x_2 = \overset{A_{11}}{0}x_1 + \underset{A_{12}}{1}x_2 + \underset{B_{11}}{0}u$

$x_2^\circ = \underset{A_{21}}{-2}x_1 - \underset{A_{22}}{3}x_2 + \underset{B_{21}}{u}$

$y = \underset{C_1}{3}x_1 + \underset{C_2}{x_2} + \underset{D}{0}u$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}$

$D = 0$

$\frac{y}{u} = C(SI - A)^{-1}B + D$

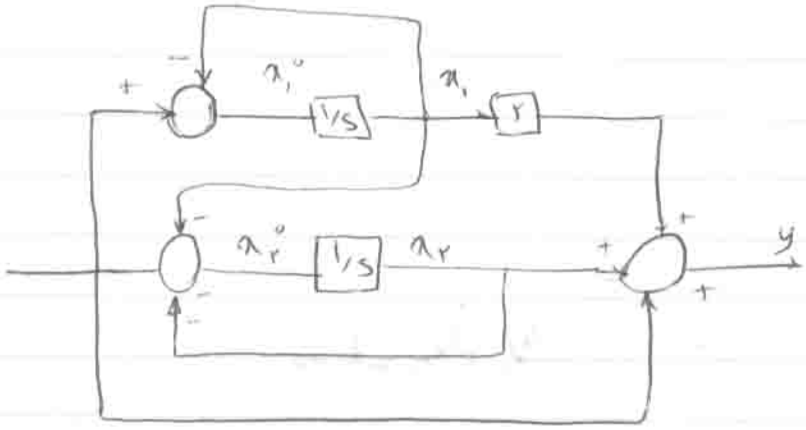
$\frac{y}{u} = [3 \; 1] \times \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0$

$= \frac{[3 \; 1] \times \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{S(S+3)+2} = \frac{S+3}{(S+1)(S+2)}$

PAPCO

Subject: کنترل خطی

Year. ۸۷ Month. ۱۲ Date. ۱۴/۵



$$\frac{y}{u} = \frac{s^2+4s+4}{s^2+3s+2}$$

مسیره

$P_1 = \frac{2}{s}$ $\quad P_2 = \frac{1}{s}$ $\quad P_3 = 1$

$L_1 = -\frac{1}{s}$ $\quad L_2 = -\frac{1}{s}$

$$y = \overset{C_{11}}{2x_1} + \overset{C_{12}}{x_2} + \overset{D}{1u} \qquad C = [2 \quad 1] \qquad D = 1$$

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 0x_2 + u \qquad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

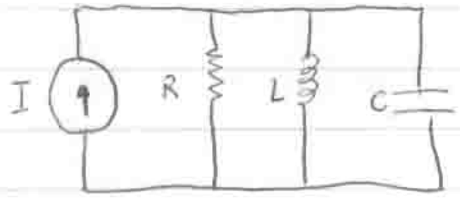
$$\dot{x}_2 = -x_1 + 2x_2 + u$$

$$\frac{y}{u} = C(SI-A)^{-1}B + D$$

$$\text{Det } SI-A = \text{Det}\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix} = 0$$

$$(s+1)(s+2) = 0 \Rightarrow s^2 + 3s + \cancel{2} = 0$$ صفح کد :

P4PCO



$I = \frac{V_C}{R} + C\dot{V}_C + \frac{1}{L}\int V_C\,dt \qquad V_C = V_L = L\dot{I}_L$

$I = I_L + C\dot{V}_C + \frac{V_C}{R} \qquad \dot{I}_L = \frac{1}{L}V_C$

$\dot{V}_C = \frac{I}{C} - \frac{I_L}{C} - \frac{V_C}{RC} \qquad \dot{i}_L = 0I - 0I_L + \frac{1}{L}V_C$

$$\begin{cases} \dot{V}_C = \frac{I}{C} - \frac{I_L}{C} - \frac{V_C}{RC} \\ \dot{I}_L = 0I - 0I_L - \frac{1}{L}V_C \end{cases} \qquad \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{V}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_C \\ I_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$I_R = \frac{V_C}{R} \Rightarrow y = 0I + 0I_L + \frac{1}{R}V_C \qquad y = [0 \;\; \frac{1}{R}] \begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix} + 0I$